استخدام طريقة ادومين–باديه لحل معادلة برغرز العامة و نظام معادلات برغرز–هوكسلي المزدوج–

الباحث الرئيس : د. عبير حميدي الحربي \ قسم الرياضيات
الباحث المشارك : د. إيمان فهمي \ قسم الرياضيات

- دعم مركز البحوث بأقسام العلوم و الدراسات الطبية البحث بتاريخ ٩-٣-١٤٢٩ هـ وقد تم الانتهاء من البحث بتاريخ ٩-٣-١٤٣٠ هـ.

مشكلة البحث

- تستخدم النماذج الرياضية غير الخطية لوصف كثير من الظواهر في الطبيعة. وكانت الطرق التقريبية في السابق هي الطرق الوحيدة المستخدمة في إيجاد حلول لمثل هذه النماذج.
- حاليا، قد ظهرت العديد من الطرق لإيجاد بعض الحلول التامة وكذلك بعض الحلول العددية التحليلية منها طريقة ادومين– باديه التي أثبتت صلاحيتها في حل عدة معادلات تفاضلية غير خطية.
- البحث الحالي يقدم طريقة ادومين- باديه العددية كطريقة جديدة لإيجاد حل تقريبي لمعادلة برغرز العامة، والنظام المماثل المزدوج برغرز- هوكسلي.
- والمشكلة الرئيسة في هذا البحث هي صعوبة إيجاد حلول تامة أو تقريبية لهذه المعادلات ويرجع ذلك لأسباب عديدة من أهمها وجود جزء غير خطي في المعادلات المراد إيجاد حلها.

أهمية البحث

- أهمية البحث تتمثل في أهمية المعادلات المطروحة والطريقة الجديدة لحلها. معادلة برغرز ونظام معادلات برغرز-هوكسلي هي معادلات تفاضلية غير خطية تمثل ظواهر فيزيائية مثل الذبذبات في بعد واحد أو الموجات الصوتية في محيط ضوضاء.

- إيجاد حلول تحليلية أو عددية لها قد شغل علماء من الفيزياء، الهندسة والرياضيات. لذلك فان البحث يساهم في تقديم معالجة جديدة وحلول تقريبية عددية لهذه المعادلات.

منهجية البحث وطرق الحل

- يبدأ البحث بتطبيق الطريقة التحليلية ادومين وذلك بفصل المعادلة التفاضلية برغرز إلى حد خطي وحد غير خطي. و باستخدام كثيرة الحدود الادومين التقريبية والتكرار ينتج حل سلسلي ولتحسين الحل عن طريق توسيع مجاله و زيادة سرعة تقاربه نطبق طريقة باديه العددية.

- نظام المعادلات برغرز-هوكسلي المزدوج يحتاج إلى جهد اكبر لتطبيق ادومين - باديه على كل معادلة في النظام وحسابات معقدة نجريها على البرنامج MATHEMATICA حيث يساعد البرنامج على رسم النتائج والمقارنة بالحل الفعلي. فالبحث يساهم في تقديم معالجة جديدة بحلول عددية أدق و أسرع تقارب لهذه المعادلات لم يسبق الوصول إليها في الدوريات العلمية.

أهداف البحث

١. تقديم طريقة جديدة ادومين - باديه العددية للتوصل لحل تقريبي سريع التقارب وبدقة أعلى من ادومين وحدها لمعادلة برغرز ونظام معادلات برغرز-هوكسلي المزدوج.
٢. حساب الحلول التقريبية وتحسين النتائج لمعادلة برغرز وذلك باستخدام طريقة التحليل ادومين للوصول لحل سلسلي كخطوة اولى ثم تحسين الحل باستخدام طريقة باديه التقريبية. ثم قمنا بتطوير طريقة ادومين - باديه لحل نظام معادلات برغرز-هوكسلي المزدوجة.
٣. نبرمج كل المعادلات على البرنامج Mathematica للحصول على النتائج، و بعد حسابات طويلة نقوم برسم النتائج .
4. مقارنة الحل بطريقة ادومين - باديه مع الحل بطريقة ادومين وحدها. مقارنة عدة نسب مختلفة من قيم باديه التقريبية. ومن ثم النتائج كلها تقارن بالحل التحليلي للمعادلات بالرسم والجداول.

معادلة برغرز العامة

The generalized Burgers equation given in (1) can be formulated as

$$u_t + f_x - \alpha u_{xx} = 0$$

and for $f = f(u)$ we get

$$u_t + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} u_x - \alpha u_{xx} = 0$$

in the case of two interacting configurations $u = u(x, t)$ and $v = v(x, t)$ we have

$$u_t + f_x - \alpha u_{xx} = 0$$
$$v_t + g_x - \eta v_{xx} = 0.$$

Explicitly consider the pair of equations

$$u_t + \alpha(3pu^2 + \mu v^2)u_x + 2\mu\alpha u v v_x - \alpha u_{xx} = 0$$
$$v_t + (A + \mu\eta u^2)v_x + 2\mu\eta u v u_x - \eta v_{xx} = 0$$

where A, p, η, μ, and α are real parameters. This system has the traveling wave solutions [5]

$$U(x, t) = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\tanh(p(x - ct))\right)^{1/2}$$

$$V(x, t) = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\tanh(p(x - ct))\right)^{1/2}$$

كمثال لنظام معادلتين برغرز -هوكسلي

$$u_t + \frac{dg}{du}u_x + \frac{dg}{dv}v_x - \alpha u_{xx} = \beta g(u, v)$$

$$v_t + \frac{d\bar{g}}{dv}v_x + \frac{d\bar{g}}{du}u_x - \eta v_{xx} = a\bar{g}(u, v).$$

To give an explicit example, let us consider

$$u_t + \alpha(p - 3pu^2 - \mu v^2)u_x - 2\mu\alpha u v v_x - \alpha u_{xx} = \beta\alpha u(p - pu^2 - \mu v^2)$$

$$v_t + \mu\sigma u^2 v_x - 2\mu\sigma u v u_x - \sigma v_{xx} = -a\sigma\mu u^2 v$$

where a, p, and μ are real parameters. This system has the traveling wave solutions [5]

$$U(x, t) = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tanh(\mu(x - ct))\right]^{1/2}$$

$$V(x, t) = \left[\frac{(p/\mu - 1)}{2}(1 - \tanh(\mu(x - ct)))\right]^{1/2}$$

provided that $p/\mu > 1$ and $c = -\alpha\beta = -a\sigma$.

تم معالجة النظام بطريقة الادومين و حصلنا على الحل التسلسلي

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t), \tag{33}$$

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x,t). \tag{34}$$

The first few terms $u_n(x,t)$, $v_n(x,t)$ (for $n \geq 1$) are given as follows:

$$\begin{aligned}
u_0(x,t) &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tanh(\mu x)\right)^{1/2} \\
v_0(x,t) &= \left(\frac{(p/\mu - 1)}{2}(1 - \tanh(\mu x))\right)^{1/2} \\
u_1(x,t) &= \frac{t\alpha\beta\mu\,\mathrm{sech}(\mu x)^2}{2\sqrt{2}\sqrt{1+\tanh(\mu x)}} \\
v_1(x,t) &= \frac{ta\sigma(-p+\mu)\,\mathrm{sech}(\mu x)^2}{4\sqrt{\frac{p-\mu}{\mu+e^{2x\mu}\mu}}} \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{35}$$

Figs. 7 and 8 show the results from the ADM solutions $u_4(x,t)$ and $v_4(x,t)$ compared with the exact solutions $U(x,t)$ and $V(x,t)$, respectively, for $t = 0.5$ and $-10 \leq x \leq 10$. From these results we obtain the truncated power series solution in t, and at $x = 0$ we obtain the [2/2] Padé approximants:

$$\left[\frac{2}{2}\right]u(0,t) = \frac{0.707105 + 0.0616816t - 0.00346093t^2}{1 - 0.0545192t - 0.0128802t^2} \tag{36}$$

$$\left[\frac{2}{2}\right]v(0,t) = \frac{0.29277 - 0.0255386t - 0.00143296t^2}{1 + 0.0545192t + 0.0128802t^2}. \tag{37}$$

النتائج

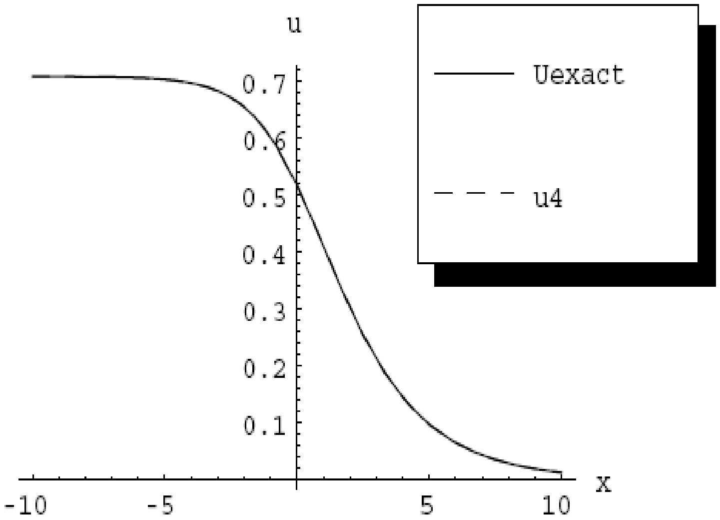


Fig. 1. ADM solution $u_4(x,t)$ compared with the exact $U(x,t)$ solution of the generalized Burgers equation at $t = 0.5$.

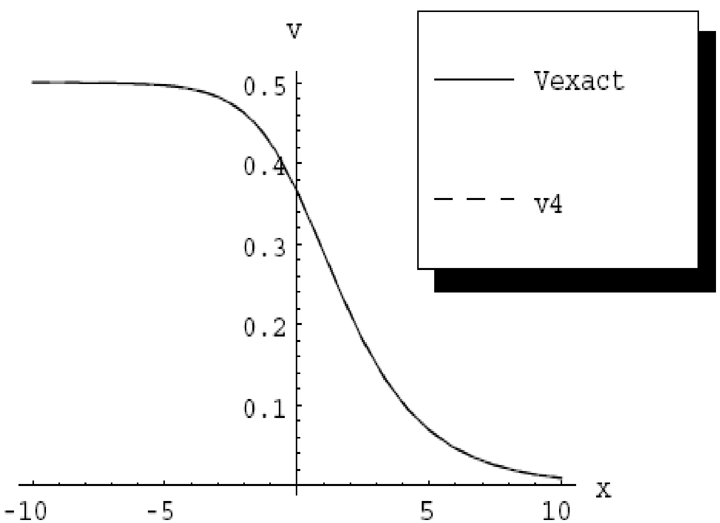


Fig. 2. ADM solution $v_4(x,t)$ compared with the exact $V(x,t)$ solution of the generalized Burgers equation at $t = 0.5$.

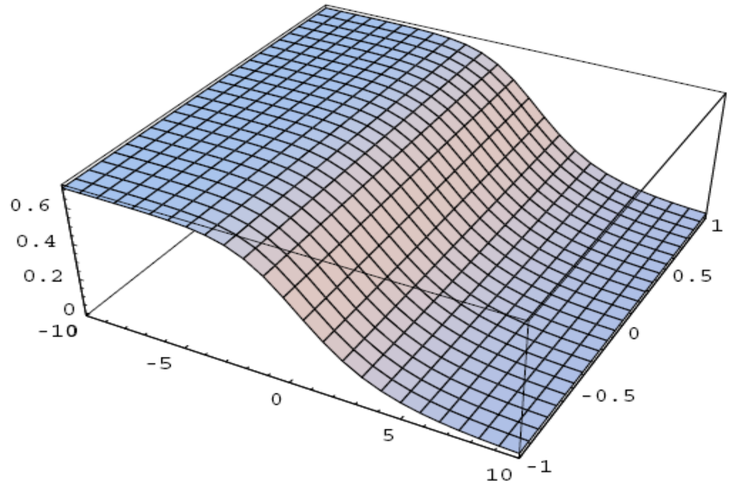


Fig. 3. ADM solution $u_4(x, t)$ of the generalized Burgers equation.

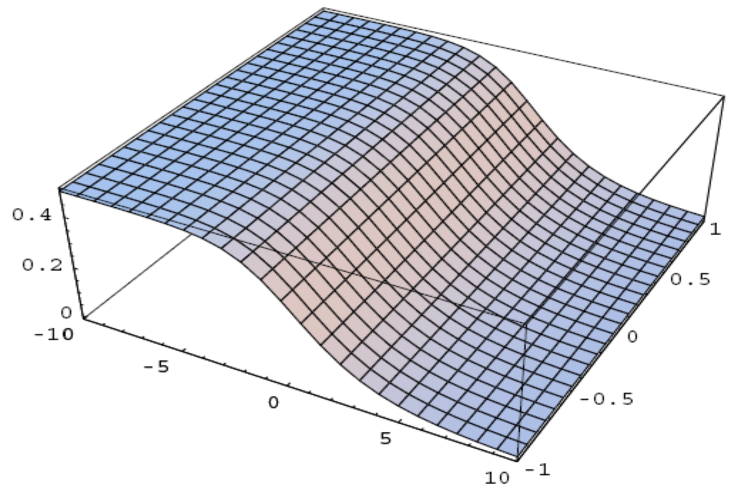


Fig. 4. ADM solution $v_4(x, t)$ of the generalized Burgers equation.

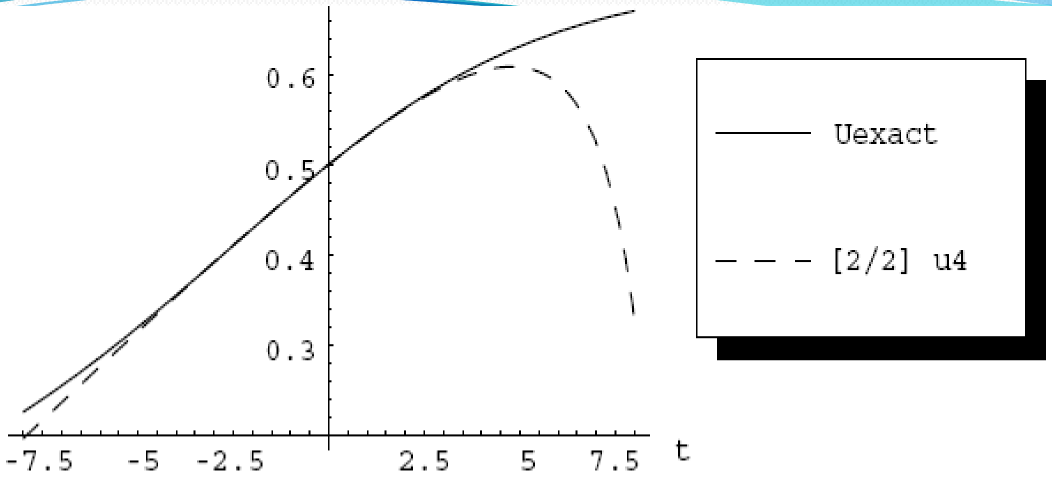


Fig. 5. The ADM–Padé solution $[2/2]u(x, t)$ and the exact solution $U(x, t)$ of the generalized Burgers equation for $x = 0$.

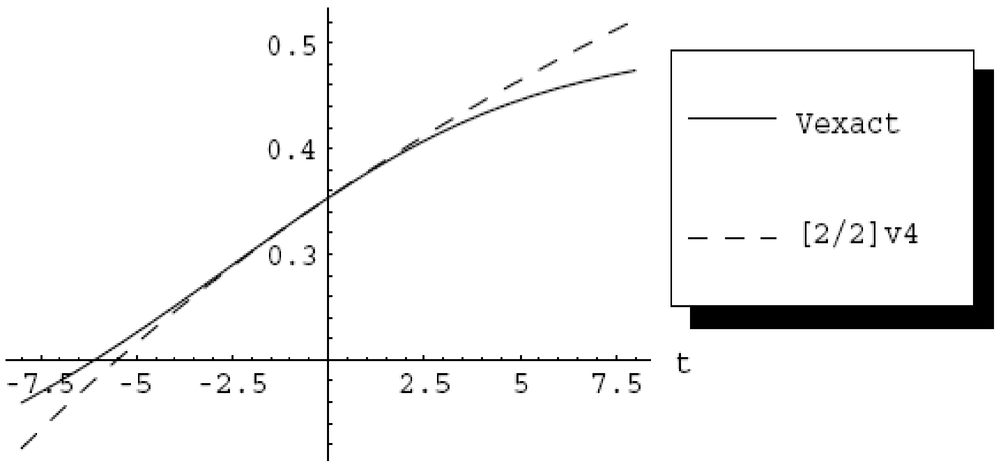


Fig. 6. The ADM–Padé solution $[2/2]v(x, t)$ and the exact solution $V(x, t)$ of the generalized Burgers equation for $x = 0$.

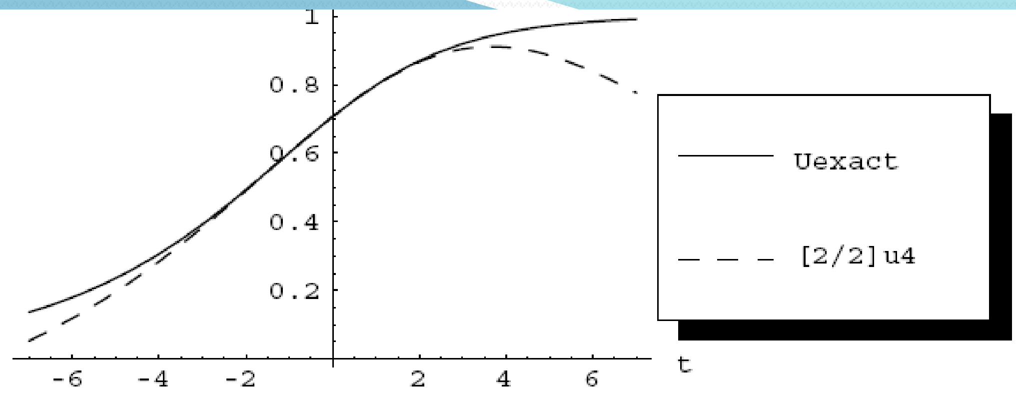


Fig. 9. The ADM–Padé solution $[2/2]u(0,t)$ and the exact solution $U(x,t)$ of the Burgers–Huxley equation for $x = 0$.

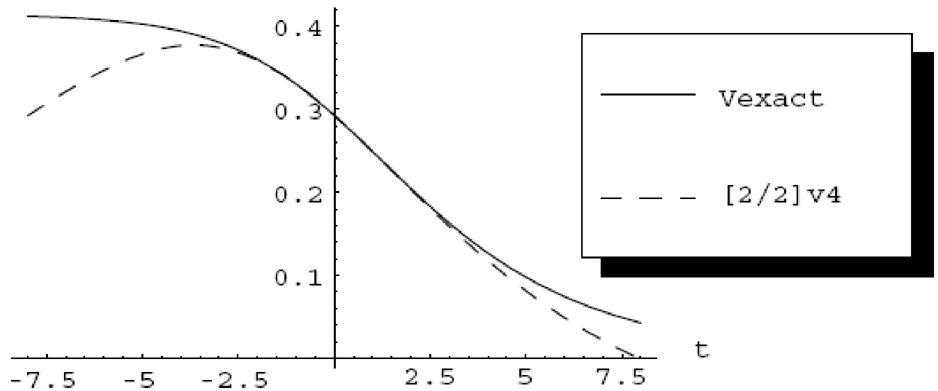
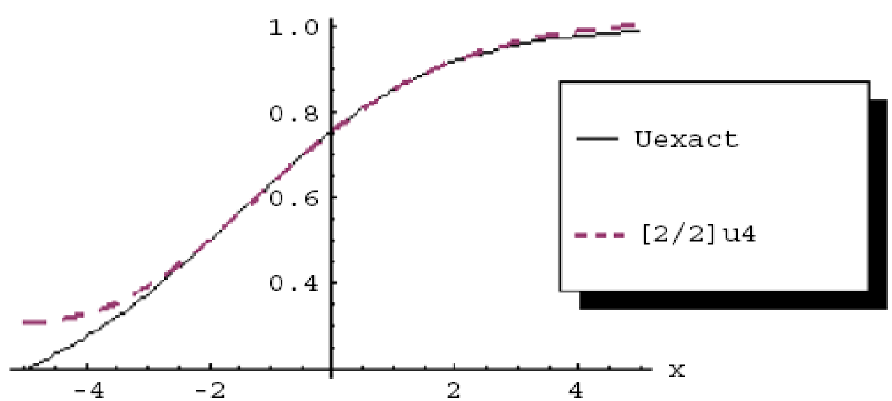


Fig. 10. The ADM–Padé solution $[2/2]v(0,t)$ and the exact solution $V(x,t)$ of the Burgers–Huxley equation for $x = 0$.



النتيجة :

- توصل البحث الى نتائج ممتازة وقدم حلول دقيقة عددية لأهم المعادلات التفاضلية الغير خطية .
- يحتوي البحث على مزيد من المعادلات التفصيلية و الاشكال التوضيحة التي تم الحصول عليها ببرنامج Mathematica.
- نظرا لجودة النتائج في المستقبل سنحاول تطبيق طريقة ادومين – باديه على معادلات أخرى.
- نوصي كل المهتمين بحلول هذه المعادلات باستخدام الطريقة الجديدة ادومين – باديه.

4. Conclusions

We present a numerical solution to the generalized Burgers and Burgers-Huxley systems with two coupled equations by using the Adomian decomposition and Padé approximants. On the basis of our graphical results we conclude that the ADM-Padé technique produced very good solutions and is a very reliable method for solving such equations. For obtaining more accurate results and larger intervals of convergence we can increase the order of the Padé approximants and use [3/3]

References

[1] J.M. Burgers, Adv. Appl. Mech. 1 (1948).
[2] J.M. Burgers, The Nonlinear Diffusion Equation, Reidel, Boston, 1974.
[3] L. Debnath, Nonlinear Partial Differential Equations, Birkhauser, Boston, 1997.
[4] M. Basto, V. Semiao, F. Heiros, Numerical study of modified Adomian's method applied to Burgers equation, J. Comput. Appl. Math. 206 (2) (2007) 927–949.
[5] D. Bazeia, Chiral solutions to generalized Burgers and Burgers–Huxley equations, MIT-CTP (1998) 2174.
[6] E.S. Fahmy, K.R. Raslan, H.A. Abdulsalam, On the exact and numerical solution of the time delayed Burgers equation, Internat. J. Comput. Math. (2008).
[7] G. Adomian, Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method, Kluwer Academic, Boston, MA, 1994.
[8] E. Bobolian, S. Javadi, New method for calculating Adomian polynomials, Appl. Math. Comput. (2004) 153–253.
[9] S. Awang, Kechil, I. Hashim, Series solution of flow over nonlinearly stretching sheet with chemical reaction and magnetic field, Phys. Lett. A 372 (2008) 2258.
[10] S. Awang, Kechil, I. Hashim, Non-perturbative solution of free-convective boundary-layer equation by Adomian decomposition method, Phys. Lett. A 363 (2007) 110–114.
[11] Soliman, Abdou, The decomposition method for solving the coupled modified KdV equations, Math. Comput. Model. 47 (2008) 1035–1041.
[12] Ugurlu, Kaya, Exact and numerical solutions of generalized Drinfeld–Sokolov equations, Phys. Lett. A 372 (2008) 2867–2873.
[13] O. Abdulaziz, N.F.M. Noor, I. Hashim, M.S.M. Noorani, Further accuracy tests on Adomian decomposition method for chaotic systems, Chaos, Solitons Fractals 36 (2008) 1405–1411.
[14] I. Hashim, M.S.M. Noorani, R. Ahmad, S.A. Bakar, E.S. Ismail, A.M. Zakaria, Accuracy of the Adomian decomposition method applied to the Lorenz system, Chaos, Solitons Fractals 28 (2006) 1149–1158.
[15] M.S.M. Noorani, I. Hashim, R. Ahmad, S.A. Bakar, E.S. Ismail, A.M. Zakaria, Comparing numerical methods for the solutions of the Chen system, Chaos, Solitons Fractals 32 (2007) 1296–1304.
[16] G.A. Baker, Peter Graves-Morris, Padé Approximants, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
[17] T.A. Abassy, M.A. El-Tawil, H.K. Saleh, The solution of Burgers and Good Boussineq equations using ADM–Padé technique, Chaos, Solitons Fractals 32 (2007) 1008–1026.
[18] A. Alharbi, E.S. Fahmy, Approximate solution for time-delayed convective fisher equation using ADM–Padé, Asian–Europ. J. Math. (2009) (in press).
[19] A.M. Wazwaz, Analytical approximations and Padé approximants for Volterra's population model, Appl. Math. Comput. 100 (1999) 13–25.
[20] N. Ngarhasta, Résolution numérique de quelques probl èmes d'évolution par la méthode de G. Adomian, Mé moire de DEA (2000).
[21] Y. Cherruault, Convergence of Adomian's method, Kyb. 18 (1989) 8–31.
[22] T. Mavoungou, Y. Cherruault, Convergence of Adomain method and applications to non-linear partial differential equation, Kyb. 21 (6) (1992) 13–25.
[23] I. Bajunaid, E.S. Fahmay, Approximation solution for the generalized time-delayed Burgers–Huxley equation, Far East J. Appl. Math. (2007) 28.